№15 дәріс сабағы

Көп айнымалыға байланысты функцияның дербес туындылары. Толық дифференциал. Жанама жазықтық пен нормаль теңдеулері. Күрделі функцияның туындысы.

Анықтама 1. Анықталу облысы жазықтықтың(кеңістіктің) ішкі жиыны болатын D облысы, ал мәндер облысы нақты осьтің бойындағы E жиыны болатын функция екі(үш) айнымалыға байланысты функция деп аталады.

D - Oxy жазықтығындағы жиын, ал E - Oz осінің жиыны болатын екі айнымалыға байланысты функция $z = f(x, y)$ түрінде жазылады.

Айқын түрде берілген функциялардың дербес туындыларының анықтамасын беру үшін $y = const$ деп есептеп, x-ке Δx өсімшесін береміз $(x + \Delta x \in D)$. Онда z функциясының x бойынша дербес өсімшесі:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Дәл осылай, z функциясының y бойынша дербес өсімшесін табамыз:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Егер x пен y-тің екеуіне де сәйкесінше $\Delta x, \Delta y$ өсімшелерін беретін болсақ, онда z функциясының толық өсімшесін аламыз:

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y) \qquad (1)$$

Жалпы жағдайда, $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$ болатынын айта кеткен жөн.

Анықтама 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$ $\left[\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}\right]$ шектері бар болса, онда ол шектер z функциясынан x айнымалысы [z функциясынан y айнымалысы] бойынша алынған *дербес туындылар* деп аталады

.

Анықтама 5. $z = f(x; y)$ функциясының толық өсімшесі

$$\Delta z = \frac{\partial f(x; y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x; y)}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y \qquad (2)$$

мұндағы α_1 және α_2 $\Delta x \to 0$ және $\Delta y \to 0$ шексіз аз шамалар болатын теңдігімен өрнектелсе, онда ол *дифференциалданатын функция* деп аталады, ал бас (сызықтық) бөлігі $\dfrac{\partial f(x; y)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f(x; y)}{\partial y}\Delta y$ *толық дифференциал* деп аталады және былай белгіленеді

$$(\Delta x = dx \;,\; \Delta y = dy) : \partial z = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

(1) және (2) теңдіктерін салыстырып, $\Delta z \approx dz$ жуықтауын аламыз. Осы жуықтауды (x_0, y_0) нүктесі үшін жазып,

$$f(x+\Delta x;\ y+\Delta y) \approx f(x_0; y_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y}\Delta y$$

дифференциалды жуықтап есептеуге қолдану формуласын аламыз.

$z = F(u; v)$ функциясы берілсін, мұндағы $u = \varphi(x; y)$, $v = \psi(x; y)$ және F, φ, ψ функцияларының үзіліссіз дербес туындылары табылсын, онда z функциясынан x және y айнымалылары бойынша алынған дербес туындылар төмендегі формулалармен есептеледі:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Егер $z = F(x, y, u)$ функциясы берілсе, мұндағы $y = f(x)$, $u = \psi(x)$, онда толық туынды $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dx}$ - формуласымен анықталады.

Бағыт бойынша туынды және градиент. Көп айнымалыға байланысты функцияның жоғарғы ретті дербес туындылары мен дифференциалдары. Локальді экстремум ұғымы.

$z = f(x; y)$ функциясы беріліп, оның f'_x және f'_y дербес туындылары табылсын.

f'_x және f'_y -тің тағы бір туындылары табылса, олар берілген функцияның екінші ретті дербес туындылары деп аталады:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x; y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x; y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

$n > 2$ ретті дербес туындыларды да осыған сәйкес табуға болады.

Теорема 1. Егер $z = f(x; y)$ функциясы мен $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ анықталған және $M(x; y)$ нүктесінде және оның қандай да бір аймағында үзіліссіз болса, онда бұл нүктеде $f''_{xy} = f''_{yx}$.

Теорема 2. $n > 2$ ретті аралас туынды үшін де сәйкес шарттар орындалса, жоғарыдағы теңдік орынды болады.

Функцияның жоғарғы ретті дифференциалдары (символдық формуласы) мына формула бойынша есептеледі:

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n z.$$

Анықтама 6 . Егер $P(a,b)$ нүктесінің қандай да бір аймағындағы $P'(x,y)$ нүктелері үшін $z = f(x,y)$ функциясы $f(a,b) > f(x,y)$ (($f(a,в) < f(x,y)$) теңсіздігі орындалса, онда $P(a,b)$ нүктесі максимум(минимум) нүктесі деп аталады. Максимум немесе минимум нүктелері функцияның экстремум нүктелері деп аталады.

Анықтама 7. Дифференциалданатын $f(x,y)$ функциясының экстремумы болатын ($a,b)$ нүктесі кризистік нүкте деп аталады. Ол төмендегі теңдеулер жүйесін шешу жолымен табылады:

$$f'_x(a,b) = 0, \quad f'_y(a,b) = 0 .$$

(3)

Жалпы жағдайда, $f(x,y)$ функциясының $P(a,b)$ экстремум нүктесінде не $df(a,b) = 0$, не $df(a,b)$ табылмайды.

Экстремумның жеткілікті шарты:

$P(a,b)$ - $f(x,y)$ функциясының кризистік нүктесі болсын, яғни, $df(a,b) = 0$. Яғни, $f'_x(a,b) = f'_y(a,b) = 0$ болсын және

$$A = f''_{xx}(a,b), \; B = f''_{xy}(a,b), \; C = f''_{yy}(a,b) .$$

$\Delta = AC - B^2$ дискриминантын құрайық. Онда:

1. егер $\Delta > 0$, онда функцияның $P(a,b)$ нүктесінде экстремумы бар, яғни, $A < 0$ (немесе $C < 0$) болса, максимумы, ал A>0 (немесе C>0) болса, минимумы болады;
2. егер $\Delta < 0$ болса, онда $P(a,b)$ нүктесінде экстремум жоқ;
3. егер $\Delta = 0$, онда $P(a,b)$ нүктесінің экстремум нүктесі болу, болмауы ашық сұрақ боп қалады (қосымша зерттеулер қажет).

Екі айнымалыға байланысты функциялар сияқты үш және одан да көп айнымалы функциялар үшін де экстремумға зерттеудің қажетті және жеткілікті шарттары осыған ұқсас.